Сергей Олегович Иванов,

выпускник ЛНМО 2003 года,

Лаборатория современной алгебры и приложений, к. ф.-м. н.

У меня было много учителей. Кандидатскую диссертацию по гомологической алгебре я защитил под руководством Генералова Александра Ивановича. Сейчас я работаю вместе с Романом Михайловым, от которого я тоже очень многому научился. Ещё я считаю своими учителями замечательных математиков Флоринского Александра Алексеевича, с которым я занимался фрактальной геометрией, и Кублановского Станислава Искаковича, с которым я занимался теорией полугрупп. Кроме того, большое влияние на меня оказал Эммануэль Дрор Фарджун, израильский математик, классик теории гомотопий, с которым я не так много общался лично, но от которого я успел многому научиться. Но самое большое влияние на формирование меня как математика, конечно, оказал мой учитель математики в ЛНМО Илья Александрович Чистяков.

Встречаясь с человеком во взрослой жизни, даже не зная, что он учился у Ильи Александровича, я сразу это чувствую, начав говорить с ним о математике или о какой-то другой содержательной деятельности. Илья Александрович прививает своим ученикам определённый стиль математических рассуждений и стиль мышления в целом, который остаётся на всю жизнь. Не так просто описать этот стиль.

Многие в математике сравнивают этот стиль с Бурбакистским, указывая на нашу склонность к оперированию аб-

стракциями. Действительно, Илья Александрович рано приучает школьников к абстрактному мышлению, это наша особенность. Один мой знакомый математик, как-то раз, иронизируя над ЛНМО, сказал: «Среднестатистический ЛНМОшник может построить теорию интеграла Лебега, но не может правильно вычислить ни одного интеграла». Это не правда, вычислять интегралы нас тоже учат, и этому уделяется достаточно времени, но наши выпускники явно лучше справляются с построением теорий, чем с решением олимпиадных задач на скорость, по сравнению с выпускниками других математических школ. При этом этот стиль не мешает некоторым из наших выпускников заниматься прикладной математикой, публиковать статьи в ведущих журналах по искусственному интеллекту и машинному обучению или заниматься высокоточным моделированием белков.

Чистяков учит работать над большими проектами, ориентирует на долгосрочную работу в одном направлении. Это умение очень важно для учёного. Даже для написания кандидатской диссертации требуется несколько лет работы в одном направлении, не говоря уже о действительно больших научных проектах. Поэтому в нашей школе такое большое внимание уделяется годовым научным проектам для школьников и участию в конкурсах ISEF.

Именно ЛНМО-шный стиль мышления, который привил мне Илья Александрович, сделал меня математиком, помог мне защитить кандидатскую и помогает сейчас продолжать успешно ей заниматься. Благодаря этому стилю я написал около тридцати научных статей, стал членом

«Санкт-Петербургского математического общества», поработал в Германии, Сингапуре и Индии. Побывал в многих других европейских и азиатских странах. Стал одним из соавторов очень важной теоремы в алгебраической топологии о нетривиальности гомотопических групп двумерной сферы, на которой я хочу остановиться подробнее.

О теореме в алгебраической топологии о нетривиальности гомотопических групп двумерной сферы

Двумерная сфера — это обычная сфера в трёхмерном пространстве, поверхность шара. Она называется двумерной, потому что, если вокруг любой точки вырезать маленький кусочек, то он будет похож на кусочек плоскости, а плоскость имеет размерность два. Аналогично 2-мерной сфере определяется n-мерная сфера для любого натурального числа n. Например, одномерная сфера — это окружность (если вырезать маленький кусочек окружности вокруг любой точки, то он похож на маленький кусочек прямой). n-мерная сфера — это граница шара в $n+1$-мерном пространстве. Стандартная n-мерная сфера обозначается через S^n.

Алгебраическую топологию интересуют непрерывные отображения между различными фигурами. Причём, если одно отображение можно непрерывно продеформировать в другое, оставаясь при этом всё время внутри этой фигуры, то отображения считаются «одинаковыми», или более научно выражаясь «гомотопными».

Например, экватор Земли — это окружность на сфере (я здесь предполагаю, что Земля шарообразная, а не плоская). Эту окружность можно непрерывно продеформировать к полюсу, рассматривая окружности на поверхности Земли с заданной широтой. Эти окружности на сфере можно воспринимать как отображения из стандартной окружности в эту сферу $S^1 \to S^2$. Таким образом, это экваториальное отображение из окружности в двумерную сферу гомотопно отображению из окружности в полюс на сфере. Отображения, гомотопные отображению в одну точку, мы будем называть (гомотопически) тривиальными. Таким образом, это отображение окружности в экватор двумерной сферы гомотопически тривиально.

На самом деле, любое отображение из окружности в двумерную сферу гомотопически тривиально. Но не все отображения между разными фигурами гомотопически тривиальны. Например, тождественное отображение из окружности в себя $S^1 \to S^1$ не тривиально, его нельзя продеформировать в отображение, которое посылает всю окружность в одну точку окружности, оставаясь при деформации всё время внутри окружности. Это легко себе представить: как ни деформируй резинку, натянутую на бесконечную трубку, снять её не удастся.

Точно так же тождественное отображение для сферы любой размерности $S^n \to S^n$ нетривиально. Здесь возникает вопрос: между сферами каких размерностей может быть нетривиальное отображение? Возможно, между сферами разных размерностей вообще не существует нетривиальных

отображений? Этим вопросом задавались математики до 1931 года. Например, было доказано, что, если $n < m$, то любое отображение $S^n \to S^m$ тривиально.

Однако в 1931 году было построено знаменитое расслоение Хопфа $S^3 \to S^2$, которое является нетривиальным отображением из трёхмерной сферы в двумерную сферу. Позже было построено много других нетривиальных отображений между сферами разных размерностей. С другой стороны, было доказано, что между сферами некоторых размерностей не существует нетривиальных отображений. К примеру, любое отображение $S^{10} \to S^6$ из 10-мерной сферы в 6-мерную тривиально. Общий вопрос о том, между какими сферами существует нетривиальное отображение, открыт до сих пор. Одно из моих главных достижений в математике заключается в том, что я в соавторстве с Р. Михайловым и Д. Ву доказал, что для сферы любой размерности $n > 1$ существует нетривиальное отображение в двумерную сферу $S^n \to S^2$.

Евгений Эдуардович Лохару,

выпускник ЛНМО 2003 года,

Университет города Линчёпинг, Швеция

Я поступил в ЛНМО в 9 класс, по совету Елены Александровны Драч. В то время я занимался в кружке по программированию в Аничковом лицее. Разумеется, я хотел тогда стать программистом и компьютерами интересовался уже за долго до этого. Но уже в начале первого года в новой школе я понял, что хочу заниматься только математикой. Учеба

мне давалась не так уж и легко, да и в школу я поступил с одной из самых низких оценок. Наверное, самым сложным предметом для меня была алгебра, особенно дополнительный курс по книжке Халмоша. Мне тогда все это казалось каким-то фантастическим.

Дорога в школу у меня занимала около двух часов в один конец. Я уходил из дома около семи, и часто возвращался после восьми, и, несмотря на это, мне очень нравилось учиться. И, без преувеличения, все это заслуга Ильи Александровича, который сумел создать особенную атмосферу знаний. Уроки были одновременно и сложными, и интересными, что сближало учеников между собой. Школа дала мне множество замечательных друзей, таких как Сергей Иванов, Саша Иванов, Паша Соловьев, Женя Амосов и многих других.

Я думаю, что моему выпуску очень повезло, поскольку в то время школа была небольшой и Илья Александрович мог уделять ученикам достаточно много своего времени. Илья Александрович, без сомнений, оказывал огромное влияние на своих воспитанников. Про себя могу сказать, что это предопределило мое будущее как ученого.

Я помню, как во второй половине 10го класса я стал, в силу разных обстоятельств, плохо учиться, ну совсем плохо. И тогда Илья Александрович сказал мне одну фразу, которая мне очень запомнилась: «Женя, ты теряешь свою уникальность». Это, возможно, не совсем точное воспроизведение, но смысл был такой. Этими словами Илья Александрович сумел до меня достучаться. Летом после 10го класса я начал активно читать книжки по математике и решать все-

возможные задачи. Благодаря этому я смог начать заниматься с Александром Алексеевичем Флоринским вместе с Сергеем Ивановым. Думаю, именно тогда мы стали «заядлыми математиками» и близкими товарищами. В школе я научился мыслить по-научному, получил опыт решения сложных исследовательских задач, и выработал некоторую уверенность в себе, что очень помогло мне в будущем.

После окончания школы я поступил на МатМех, где учился на кафедре математического анализа. Со мной на МатМех тогда поступили многие из моего класса, поэтому учиться было особенно весело. Свою дипломную работу и первую кандидатскую диссертацию я написал у Сергея Витальевича Кислякова. После этого я несколько лет работал преподавателем в Политехническом Университете, а также в Лаборатории Чебышева. Позднее я получил Ph. D. позицию в Швеции у Владимира Аркадьевича Козлова и с тех пор живу за границей. В настоящее время я живу и работаю исследователем в Швеции, в университете города Линчёпинг. Я продолжаю успешно заниматься наукой в области математической теории волн на воде. Это удивительный раздел математики, которому уже более 200 лет, лежит на стыке анализа, геометрии и даже алгебры. Многие именитые ученые внесли свой вклад в эту область, среди них Ньютон, Эйлер, Лагранж, Лаплас, Коши, Пуассон, Стокс, Грин и многие другие. Ниже я расскажу о своей работе чуть более подробно.

Математическая теория волн

Моя работа в основном связана с изучением установившихся волн на поверхностности идеальной жидкости, скажем, воды. Установишаяся волна «бежит» по поверхности жидкости с постоянной скоростью, не меняя своей формы. Мы часто видим такие волны на пляжах, в море, убегающими в стороны от моторной лодки.

С математической точки зрения задачу можно сформулировать как нелинейное эллиптическое уравнение

$$\Delta\psi + \omega(\psi) = 0$$

в некоторой ограниченной области, занимаемой жидкостью, на границе которой функция ψ — константа: нуль на дне и единица на поверхности. Верхняя граница области, а именно профиль волны, определяется как график функции η, которая неявным образом задается через уравнение Бернулли:

$$\frac{1}{2}|\psi|^2 + \eta = \text{const}.$$

Так, для заданной функции ω (определяющей завихрение в жидкости) требуется определить функции ψ и η удовлетворяющие данным уравнениям. Звучит просто, так? На деле все совсем не так, ну совсем. Во первых, уравнения нельзя решить в явном виде. Во вторых, при всей своей долгой истории первые доказательства существования нетривиальных решений появились только в 1920-х годах, для случая $\omega = 0$. А для $\omega \neq 0$ гораздо позднее, по большому счету

только в 2004 году. Любопытно, что данную задачу можно также сформулировать и на языке Гамильтоновой механики (отсюда и симплектическая геометрия, теории многообразий и гомологий). Соответствующая Гамильтонова система может быть крайне сложной, допуская хаотическое движение, как например в проблеме трех тел небесной механики.

В своей работе я занимаюсь доказательством существования новых классов решений (волн), доказательством отсутствия тех или иных решений и изучением свойств упомянутой задачи о волнах. Мне удалось решить несколько старых гипотез в этой области.

Одна из них связана с солитонами или, по-другому, уединенными волнами. Уединенная волна определяется непрерывной функцией $\eta(x)$, для которой существуют пределы $\lim_{x\to-\infty}\eta(x)$ и $\lim_{x\to+\infty}\eta(x)$. Все известные солитоны имеют симметричный профиль волны ровно с одним горбом. Гипотеза, в свою очередь, состояла в том, чтобы доказать, что других солитонов не существует, например с двумя горбами, или более сложных. Идея, предложенная мной для решения этой задачи, оказалась довольно полезной и позволила также полностью доказать гипотезу Бенджамина и Лайтхилла о бегущих волнах. Помимо этого, я внес существенный вклад в изучение экстремальных волн, для которых профиль волны имеет точечную особенность. В этой точке, скажем, x_0, функция η удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{x\to x_{0\pm}} \eta'(x) = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Такая точка называется точкой стагнации, в которой по-

ле скоростей равно нулю, т.е. жидкость никуда не течет. Проблема о существовании таких экстремальных волн для $\omega = 0$, известная как гипотеза Стокса, была серьезной задачей, которая предопределила развитие теории более чем на 50 лет. В своих работах, вместе с Владимиром Козловым, мы доказали существование экстремальных волн с завихрением (когда $\omega \neq 0$), а также изучили поведение решений в окрестностях точек стагнации.

Семенов Андрей Вячеславович,

выпускник ЛНМО 2013 года,

Лаборатория им. П. Л. Чебышёва, аспирант ПОМИ РАН

До 8 класса я не интересовался математикой вообще. Она существовала для меня лишь как обязательный предмет в плохонькой средней школе, где я учился. Не придавал я ей особенного значения и тогда, когда, к своему удивлению, оказался в списке двух лучших учеников класса, которых выставляли на районную олимпиаду по математике. На самой районной олимпиаде, не зная олимпиадной математики, я написал несколько нестандартных решений, которые увидел кто-то, связанный с ЛНМО. Я так и не узнал, кто это был, но я узнал, что мои решения легли на стол к Илье Александровичу Чистякову, и через некоторое время меня пригласили пройти экзамены и поступить в ЛНМО.

Я успешно сдал вступительные экзамены (во многом благодаря гуманитарному марафону, а не математике) и оказался в принципиально другой среде, не похожей ни на что,

виденное ранее. Первые полгода восьмого класса я учился очень плохо, даже оказался на грани отчисления — сказывалось отсутствие хоть какой-то математической подготовки и крайне насыщенная программа математических классов ЛНМО. И где-то в ноябре 8 класса Илья Александрович подошел ко мне и просто стал объяснять, где у меня были какие ошибки, а потом сказал (почти дословно) «Вот если бы вы, Семенов, все это сейчас поняли, вас бы после Университета взяли бы в Кремниевую долину». В Кремниевую долину мне, прямо скажем, не хотелось, а вот понять наконец эти значки и кванторы хотелось очень сильно — и эти слова Чистякова вместе с его безмолвной поддержкой стали той последней каплей, которая наконец-то прорвала плотину непонимания. Я смог сдать зимнюю сессию 8 класса, а затем по нарастающей «включиться» в общую жизнь класса. В 9 классе я уже считал пределы, соревнуясь с Ильей Александровичем, на скорость, а в 10ом он порекомендовал мне, вместе с тремя другими лучшими учениками класса, пойти на дополнительные курсы — это еще одно новшество ЛНМО, добровольные спецкурсы пятыми парами с университетской программой.

Потом Илья Александрович познакомил меня с моим первым научным руководителем — Александром Александровичем Ивановым, тоже выпускником ЛНМО, в тот момент уже кандидатом наук. С ним вместе мы в 11 классе сделали работу, вычисляющую алгебры Йонеды, которая взяла множество различных наград на большом количестве разных конкурсов.

После школы я поступил на МатМех СПбГУ, где продолжил работу в этой же области с Александром Ивановичем Генераловым, который воспитал немало выпускников ЛНМО, и к которому я пошел тоже благодаря тому, что заранее знал о нем от Ильи Александровича и Александра Ивановича. Я закончил МатМех с красным дипломом в 2018 году, и сейчас работаю над диссертацией в ПОМИ РАН, работая в лаборатории Чебышёва — средоточии математической жизни Санкт-Петербурга.

Благодаря Илье Александровичу я почувствовал вкус к математике, получил фундаментальные университетские знания, написал научную работу в школе и закончил 11 класс с отличием в области математического анализа — дисциплины, которую преподавал Чистяков, и которая считается самой сложной в ЛНМО. Сам Илья Александрович, посмеиваясь, сказал тогда, что было очень сложно из забитого двоечника сделать человека, чьи работы будут брать первые призы в крупнейших научных конкурсах. От себя сейчас могу добавить, что это действительно было очень сложно — но у него получилось, и это полностью его заслуга.

Геометрия симметрических пространств

Симметрические пространства — один из центральных объектов дифференциальной геометрии, важный как сам по себе, так и в связи с группами Ли. Борис Розенфельд заметил, что многие (в том числе почти все исключительные) симметрические пространства можно реализовать как «эллиптическую плоскость» над тензорным произведением двух

алгебр с композицией, что является глобальным аналогом «магического квадрата» Фрейденталя–Титса.

Например, симметрическое пространство F_{II} является плоскостью Кэли, то есть эллиптической плоскостью над октавами, а симметрическое пространство E_{VIII} является эллиптической плоскостью над тензорными произведением двух алгебр октав. Конструкция Розенфельда не была строгой, и позже была формализована различными способами: Винбергом, Ацуямой, Хуангом и Леунгом. Винберг и Ацуяма независимо посчитали число прямых, проходящих через две точки в общем положении (например, 135 для случая E_{VIII}), кроме того, Ацуяма вычислил и многообразия прямых, проходящих через две точки в специальных положениях для симметрических пространств E_{III}, E_{VI} и E_{VIII}.

Симметрические пространства имеет смысл рассматривать не только над вещественными или комплексными числами, но и над произвольными полями — в этом случае они связаны с инволюциями на простых алгебраических группах. Классические работы на эту тему принадлежат Хельминку, Ричардсону, Спрингеру, а недавно появились работы Хатченса, в которых исследуется связь с подалгебрами в неассоциативных алгебрах.

Цель моей диссертации состоит в том, чтобы обобщить результаты Ацуямы на случай произвольных полей — в частности, на случай пространств типа E_{III}, используя геометрию подалгебр в неассоциативных алгебрах.

На пути к этой цели я написал несколько статей, в том числе о представлении присоединенной алгебраической

группы как группы автоморфизмов очень просто устроенных некоторых проекторов, и о строении алгебры Ли на когомологиях Хохшильда некоторых алгебр кватернионного типа, а в данный момент я вывожу теорию для подалгебр 56-мерной алгебры Брауна, которая позволит решить для индекса $E_{8,1}^{133}$ проблему Кнейзера-Титса.

Сергей Сергеевич Синчук,

выпускник ЛНМО 2005 года,

Лаборатория им. П. Л. Чебышёва, науч. сотр., к.ф.-м.н.

В начале 2000-х годов для обычного питерского школьника существовало не так много способов узнать про ЛНМО. Один способ — хорошо написать районный тур олимпиады по математике в Невском районе СПб: Илья Александрович вручную просматривал работы участников этих олимпиад, и затем лично звонил родителям тех детей, в работах которых он находил проблески абстрактного мышления. Второй же способ, которым, собственно, я и воспользовался, — получить личную рекомендацию Е. А. Драч, в то время преподававшей в СПбГДТЮ. В то время я был восьмиклассником, заинтересованным, в основном, в изучении инженерного программирования. У меня был достаточно большой для школьника опыт программирования на Pascal'е, а также неплохие результаты выступления на городской олимпиаде по программированию: я был одним из всего двух восьмиклассников, прошедшим во второй тур, в котором школьников, собственно, и подпускали к компьютерам (первый тур проходил в формате написания программ ручкой

на бумаге).

В тот момент мне была очевидна потребность сменить мою тогдашнюю школу (языковую школу №415 в Петергофе) на какую-то физ.-мат. школу, чтобы более глубоко осваивать программирование. При этом в качестве альтернативы ЛНМО я и мои родители рассматривали тогда только Аничков лицей (как раз по рекомендации тогдашней директрисы школы №415) — про другие физ.-мат. школы города тогда мы не имели никакой конкретной информации. И именно Е. А. Драч убедила меня тогда в тотальном превосходстве ЛНМО и её образовательной программы.

Мои высокие ожидания насчёт школы на 100% оправдались. Несмотря на то, что ЛНМО в те годы (2002–2005-е гг.) была очень камерным местом (набор учеников осуществлялся не каждый год, а занятия проходили в небольшом помещении детского садика), качество образования, действительно, было на высоте: преподавателями школы являлись по большей части люди с профильным, а не педагогическим образованием, кроме того, у нас не было привычных занятий по учебникам. ЛНМО не дала мне каких-то познаний в области программной инженерии, на которые я рассчитывал изначально, зато, что более важно, школа научила меня логически мыслить — эта способность пришла ко мне спусти три месяца обучения как результат попыток решить обширные домашние задания, которые задавал Илья Александрович, — а также познакомила меня с математикой, которая и стала одним из моих главных интересов в жизни.

Главная особенность образовательной программы

ЛНМО — школьнику предлагается тренировать абстрактное мышление (вместо попыток решения олимпиадных задач) и решать «сверхдлинные» задачи, где нужно много думать. С этой целью к каждому ученику приставляли «научного руководителя»: студента, знакомого с Ильёй Александровичем, который предлагал решить какую-то сложную специальную задачу.

Моими «научными руководителями» в школьные годы были С. Добрынин (ныне известный научный журналист) и А. Хаустов. Первый предложил мне решить задачу по геометрической теории групп — теорией групп, в принципе, я занимаюсь и по сей день, второй же — преложил мне задачу по комплексному анализу, что сподвигло меня освоить его азы, за пару лет до того, как мне пришлось бы делать это в университете. После ЛНМО у меня уже не было сомнений, куда я хочу поступать, и кем я хочу стать: я поступил на направление чистой математики МатМеха, с отличием закончил его через 5 лет, а затем через 3 года защитил и кандидатскую диссертацию под руководством Н. А. Вавилова. Попробую теперь кратко рассказать о своих научных результатах.

Группы Стейнберга над кольцами

Как я уже писал выше, я занимаюсь теорией групп. Если говорить более точно, я изучаю группы Стейнберга над кольцами: это некие группы, заданные при помощи образующих и соотношений. В некотором смысле они являются «приближениями» групп Шевалле. Чтобы суметь внятно

объяснить всё это, нужно начать издалека. В математике достаточно часто задаётся вопрос о классификации тех или иных математических объектов. И оказывается, что ответы на, на первый взгляд, не связанные друг с другом вопросы, оказываются очень схожими. Так, например, такие объекты как простые комплексные алгебры Ли, бинарные полиэдральные группы, колчанные алгебры конечного типа представления, дювалевы особенности — все классифицируются с помощью некоторых графов, называемых диаграммами Дынкина (часть перечисленных объектов классифицируется не произвольными диаграммами Дынкина, а диаграммами с простыми связями, см. статью ADE-классификация в Википедии).

Оказывается, что по диаграмме Дынкина Φ и коммутативному кольцу R всегда можно построить две группы: задаваемую алгебраическими уравнениями группу $G(\Phi, R)$, так называемую «группу Шевалле», а также некоторую группу $\mathrm{St}(\Phi, R)$, заданную при помощи образующих и соотношений. Эта группа называется группой Стейнберга. Важность групп Шевалле для математики состоит в том, что именно они являются основной частью ответа на вопрос о классификации конечных простых групп: большая часть конечных простых групп — это именно группы Шевалле $G(, R)$ для некоторого конечного поля $R = \mathbb{F}_q$. Из определения групп Шевалле и Стейнберга сразу видно, что существует гомоморфизм $\mathrm{St}(\Phi, R) \to G(\Phi, R)$. Из работ Р. Стейнберга, более того, классически известно, что этот гомоморфизм является изоморфизмом в случае, когда $R = \mathbb{F}_q$ является конечным полем. Обозначим через $K_2(\Phi, R)$ ядро этого гомоморфизма. Цель

моей работы за последние несколько лет состоит в том, чтобы описать группу $K_2(\Phi, R)$ в случае, когда R является не конечным полем, а более сложно устроенным кольцом, например, кольцом многочленов от нескольких переменных. В настоящее время я заканчиваю работу над статьёй, одним из соавторов которой является другой выпускник ЛНМО — Андрей Лавренов, а основным её результатом является тот факт, что для достаточно широкого класса колец R группа $K_2(\Phi, R)$ не изменяется при переходе к кольцу многочленов, т. е. выполнено соотношение $K_2(\Phi, R[t]) = K_2(\Phi, R)$. В частности, над кольцами многочленов над конечным полем группы Шевалле часто оказываются изоморфны соответствующим группам Стейнберга.

Методы, которые мы используем, вдохновлены алгебраической К-теорией, точнее её разделом, называемым «классическая и нестабильная К-теория». Этот раздел сформировался во многом под влиянием работ великого русско-американского математика Андрея Суслина и его учеников. Промежуточные результаты, используемые нами при доказательстве сформулированного результата, перекликаются с работами многих других выдающихся математиков: В. ван дер Каллена, Ю. Хуррельбринка, У. Ремана, М. Стайна и др. Ключевое же следствие наших результатов — интерпретация групп $K_2(\Phi, R)$ как нестабильной фундаментальной группы группы Шевалле $G(\Phi)$ в смысле $\mathbb{A}^1$-гомотопической теории. $\mathbb{A}^1$-гомотопическая теория была открыта другим великим русско-американским математиком — В. Воеводским, и до сих пор известно не так много примеров явного вычисления нестабильных $\mathbb{A}^1$-гомотопических групп.

Виктор Андреевич Вялов,

выпускник ЛНМО 2002 года,

Лаборатория СПбГУ—Хуавей,
Лаборатория им. П. Л. Чебышёва

Введение

Данная статья посвящена вопросам изучения роли многообразий в машинном обучении. Мы не будем приводить строгого определения многообразия, а остановимся на том, что это некоторое подмножество пространства большей размерности, обладающее структурой меньшей размерности. В качестве примера можно рассмотреть различные кривые в $\mathbb{R}^2$ или поверхности в $\mathbb{R}^3$.

В машинном обучении обучении интерес представляет ситуация, когда данные, имеющие большое количество признаков, т. е. формально лежащие в пространстве большой размерности, по факту образуют структуру меньшей размерности (возможно, с поправкой на шум). Такие ситуации стоит учитывать при обучении различных моделей. Так при работе с линейными моделями наличие линейной зависимости между точками данных может значительно ухудшить качество модели, что можно исправить переходом в подпространство.

Мы рассмотрим вопросы, связанные с многообразиями при работе с изображениями: будем смотреть на множество различных изображений как на некоторое многообразие.

Множество изображений как многообразие в $\mathbb{R}^d$

С математической точки зрения цифровое изображение представляет собой тензор размерами $w \times h \times 3$, где w и h — это ширина и высота в пикселях, а 3 — количество цветовых каналов. Обычно при работе с изображениями их размер масштабируется к некоторым фиксированным размерам, например 224×224, поэтому мы можем считать, что имеем дело с элементами пространства $\mathbb{R}^{3 \cdot 224 \cdot 224}$. Если мы возьмем случайную точку из этого пространства, то она будет представлять собой белый шум, что очень слабо похоже на любую картинку, даже если рассматривать произведения современного искусства, а не только фотографии. Отсюда следует, что на деле мы работаем с некоторым многообразием из $\mathbb{R}^{3 \cdot 224 \cdot 224}$, причем обладающим небольшой размерностью по сравнению с исходным пространством.

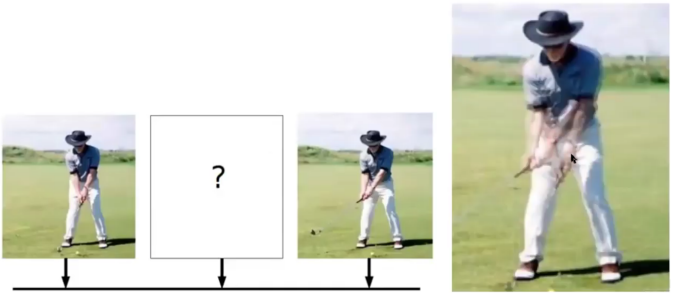


Рис. 1: Линейная интерполяция пропущенного кадра

Помимо небольшой размерности, множество изображений обладает дополнительной внутренней структурой.

Эту структуру, с одной стороны, сложно в явном виде описать строгим математическим языком, а с другой можно достаточно легко проиллюстрировать. В качестве примера можно рассмотреть последовательность из трех кадров, где средний кадр пропущен (рис. 1). Если для восстановления пропущенного кадра воспользоваться линейной интерполяцией, естественной для исходного Евклидова пространства, то полученный результат, показанный в правой части рис. 1, не будет соответствовать тому, что мы ожидаем увидеть.

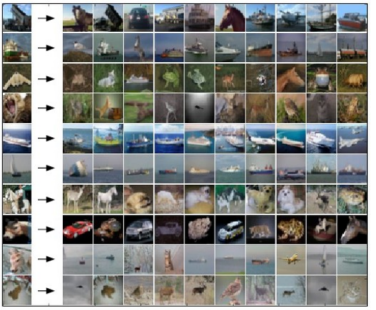


Рис. 2: Тестовые изображения датасета (левая колонка) CIFAR10 и ближайшие к ним изображения в смысле Евклидого растояния из тренировачной части

Еще одной неявной структурой на множестве изображений является понятие близости. С интуитивной точки зрения мы можем говорить, что два изображения близки между собой, если на них, например, изображены похожие объекты. То есть можно считать, что у нас задана некоторая метрическая структура. С другой стороны, естественным расстоянием для пространства $\mathbb{R}^d$ является Евклидова метрика, но Евклидово расстояние плохо коррелирует с естествен-

ным понятием близости на множестве изображений. В качестве иллюстрации можно рассмотреть выборку из датасета CIFAR10, приведенную на рис. 2. Здесь в левой колонке изображены представители каждого из 10 классов, а в правой части ближайшие к ним изображения в смысле Евклидовой метрики.

На основании вышесказанного мы можем сделать вывод, что множество изображений представляет собой некоторое достаточно сложное многообразие в $\mathbb{R}^d$. Этим, в частности, объясняется низкая эффективность на нем классических моделей машинного обучения, таких как метод ближайших соседей или логистическая регрессия, и необходимость нелинейных преобразований, которые обеспечиваются нейронными сетями.

Выбор латентного пространства

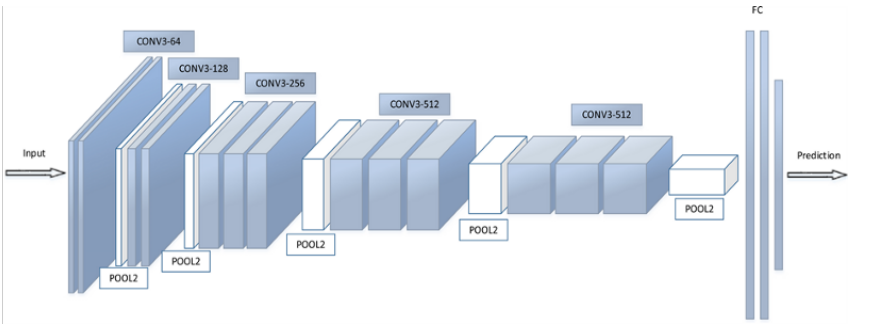


Рис. 3: Схема архитектуры нейронной сети VGG

На сегодняшний день наилучшие результаты при решении задач, связанных с изображениями, получаются

при использовании моделей на основе нейронных сетей. Мы рассмотрим эти модели в контексте работы с многообразием изображений, описанным в предыдущей части. С этой точки зрения все используемые на сегодняшний день архитектуры устроены похожим образом. Поэтому в качестве примера мы рассмотрим нейронную сеть VGG, ее схема приведена на рис. 3. Сеть VGG состоит из последовательности блоков, состоящих из набора сверточных слоев с нелинейностями, набора полносвязных слоев и линейного классификатора, который также является полносвязным слоем.

Наибольший интерес представляет вектор признаков, который подается на вход линейному классификатору. Хорошо известно, что нейронная сеть, обученная на датасете ImageNet, позволяет осуществить так называемый transfer learning. Для этого веса сети замораживаются, а линейный классификатор обучается заново, но уже под другую задачу и на меньшем количестве данных.

Теперь рассмотрим вышеописанное с точки зрения многообразия, которое представляет из себя множество изображений. Нейронную сеть без последнего слоя можно рассматривать как отображение этого многообразия в пространство меньшей размерности (обычно размерность этого вектора признаков варьируется от 256 до 2048 для разных сетей). Данное отображение также позволяет отобразить сложную семантическую структуру на множестве изображений, описанную в предыдущем разделе, на топологию, порожденную Евклидовым расстоянием. Благодаря этому близкие с точки зрения человека изображения отображаются в близ-

кие точки, что позволяет достичь хорошей точности при помощи линейной классификации.

В результате возникает задача о выборе пространства с подходящей структурой, которое наилучшим образом будет описывать множество изображений и обладать как можно более простой с вычислительной точки зрения метрической структурой. На данный момент таким пространством выступает сфера, но, возможно, есть более удачные варианты. В частности есть гипотеза, что пространство изображений обладает гиперболической структурой.

Артём Сергеевич Жуков,

выпускник ЛНМО 2009 года,

Преподаватель ИТМО, преподаватель ЛНМО

Когда я поступил в лабораторию и приехал в первый раз в лагерь, я был ошеломлен. Многие дети уже в чем-то разбирались, участвовали в олимпиадах, а я не знал ничего. Первый несколько дней я не понимал, что я вообще тут делаю, что это за место такое. Я чуть было не заплакал, но Илья Александрович мне все четко и ясно объяснил. Вооружившись этим, я сдал все лагерные экзамены с первого раза.

Уже в школе я познакомился и с другими учителями: все они были специалисты в своей профессии, многие были учеными, а не просто учителями. И все эти встречи, а они бы не случились, если бы не школа и не Илья Александрович, то я так и оставался бы в неведении о том, чем занимается математика, что существует элитарная научная куль-

тура, в которой действительно можно работать и стать специалистом в своем деле. Он продемонстрировал на своем примере, какими качествами и навыками нужно обладать, чтобы ты мог быть ее частью.

После школы я поступил на математико-механический факультет СПБГУ, где после второго курса попал на кафедру дифференциальных уравнений. Одной из причиной выбрать эту кафедру было то, что все шли на алгебру или анализ. А так как я человек, склонный к уединению, то я хотел бы пойти туда, где людей мало. Другой причиной послужил тот факт, что это была одна из тем, которую менее всего касались в школе.

После окончания университета я тут же поступил в аспирантуру, где занимался качественным анализом систем дифференциальных уравнений на предмет наличия у них так называемых инвариантных поверхностей. Эта задача выросла из вопросов устойчивости, изучаемых еще в свое время Ляпуновым и Пуанкаре. Через определенное время мне и моего научному руководителю пришла идея, что наши наработки можно использовать для поиска ответа на ослабленный вариант шестнадцатой проблемы Гильберта: проблемы Гильберта-Арнольда. В данный момент я занимаюсь разработкой метода, позволяющего выводить «бифуркационное уравнение», все решения которого будут порождать инвариантную поверхность. Особенностью этого метода является его универсальность, так как она позволяет рассматривать возмущенные части системы, зависящие от времени, а не только автономные возмущения.

Горбульский Александр Давидович,

выпускник ЛНМО 1996 года,

Бизнес-аналитик

Математикой в простом «школьном» понимании, я интересовался с самого детства. Увлекался решением задач ещё до школы, а потом и в школе в рамках того, что можно было найти в обычной средней школе. Попав случайно в кружок при Аничковом лицее, а позже и в сам лицей я увидел совсем другую математику. Сам Илья Александрович закладывал основу в подходе к математическому знанию — в отношении к аксиоматике. Полагаю, связать будущие успехи в математике с обучением в ЛНМО могут почти все выпускники. Я хочу дополнительно отметить способность привлечь увлечённых преподавателей — это касается в моем случае и математики, и физики, химии, истории — практически всех предметов. Что уж говорить об английском языке, который у меня до ЛНМО вызывал значительные сложности.

Я благодарен за то образование, которое получил в ЛНМО, за наш, думаю, лучший класс, за то, что сейчас в ЛНМО имеют возможность учиться мои дети. Благодарен выпускникам, которые активно участвуют в работе ЛНМО непосредственно, являясь преподавателями, руководителями — хранителями Лаборатории.

Смоленский Илья Вадимович,

выпускник ЛНМО 2007 года,

постдок Университетской психиатрической клиники Базеля, Швейцария

В ЛНМО я учился только два года в 10-11 классах — мой брат-близнец пришел в 9, и через год меня пригласили присоединиться. Я занимался биологией в Аничковом дворце, а об открытии биологических классов в ЛНМО тогда еще никто не думал. Но Илья Александрович и великий Евгений Александрович Нинбург, преподававший в ЛНМО биологию уговорили меня присоединиться к брату. Математическое образование очень пригодилось и в университете, и в научной работе, а вот освоить программирование не удалось ни в школе, ни в ходе нескольких последующих попыток. После школы я поступил на биофак СПбГУ, но связь со школой сохранил – на первом курсе я участвовал в организации тогда еще весьма скромного Балтийского конкурса (он тогда проходил всего в четвёртый раз). А уже через год, в 2009 году я впервые стал координатором конкурса, которым потом руководил еще четыре раза, в том числе в должности первого директора Фонда «Время науки». Когда в 2012 году я решил попробовать себя в преподавании, то сомнений, куда идти, не возникло — так я стал преподавать спецкурс «Молекулярная физиология» в биологических классах, а в 2014 взял общий курс биологии в 7-10 математических. Удивительно, что больше всего я обязан родной школе тем, что получил от нее после выпуска — многолетний опыт преподавания и организации грандиозного всероссийского кон-

курса. А еще школа подарила мне невероятных друзей, которые со мной рядом до сих пор. И семью мне тоже подарила школа.

Еще до поступления в университет я понял, что хочу заниматься нейрофизиологией, а на первых курсах заинтересовался гормональными механизмами депрессии. Поэтому учиться я пошел на кафедру общей физиологии, а писать диплом (а потом и кандидатскую диссертацию) в лабораторию нейроэндокринологии Института физиологии им. И.П. Павлова РАН.

В дипломных и кандидатской работах мы изучали как стресс, перенесенный матерью во время беременности (для потомства он называется пренатальным, т.е. дородовым) влияет на протекание посттравматического стрессового расстройства в модели на крысах. Для пренатального стресса беременных крыс в течение последней из трех недель беременности на час обездвиживают в пластиковых цилиндрах. У них активируется стрессорная реакция, гормоны стресса (прежде всего кортизол) проникают через плаценту в плод, где нарушают формирование собственной системы стрессорного ответа у потомства. В результате такие потомки во взрослом возрасте менее устойчивы к стрессу и более предрасположены к развитию постстрессовых тревожно-депрессивных расстройств. Эта проблема достаточно остро стоит в медицине, поэтому физиологи изучают молекулярные механизмы такого эффекта, пытаясь разработать пути фармакологической коррекции.

После выпуска из университета я полгода поработал в

лаборатории биомолекулярного ЯМР СПбГУ (но программирование и компьютерное моделирование опять не зашли). С 2016 по 2020 годы я работал в замечательной лаборатории молекулярных механизмов нейронных взаимодействий, которая занимается эпилепсией. При эпилепсии усиливаются возбуждающие связи между нейронами, изменяется состав рецепторов и процесс выброса нейромедиаторов из нервных окончаний. Однако понимания этих процессов пока недостаточно для создания лекарств, действующих на эти мишени, поэтому для 40% пациентов имеющееся лечение оказывается неэффективным. Так как я занимаюсь поведенческими исследованиями, моя часть работы была посвящена изучению сопутствующих психических нарушений при эпилепсии, которую мы воспроизводили в модели на крысах.

В 2020 году я уехал работать в Университетскую психиатрическую клинику Базеля. Лаборатория молекулярной психиатрии участвует в большом международном проекте по изучению терапевтического эффекта кетогенной диеты при депрессии. Для моделирования депрессии используется множество способов, мы выбрали социальную изоляцию — если 4 недели держать мышей по одной в клетке, у них развиваются симптомы депрессии. Это можно оценить в поведенческих тестах: снижение потребления вкусного (сладкая вода), отчаяние при попадании в стрессовую ситуацию (снижение попыток выбраться из воды), тревожность (боязнь освещенного пространства) и нарушение памяти (обучение находить платформу, скрытую под водой или лунку в освещенном поле, ведущую в темную нору). Кроме по-

ведения мы оцениваем процессы воспаления в мозге, кишечнике и жировой ткани, динамику массы тела (депрессия может быть связана как с ожирением, так и с потерей массы и аппетита), интенсивность образования новых нейронов в мозге (это происходит в нескольких областях, прежде всего в гиппокампе). К сожалению, несмотря на огромную распространенность депрессии (около 300 миллионов человек в мире) до 40% пациентов не помогают имеющиеся антидепрессанты. Поэтому наряду с разработкой новых лекарств, медицина и физиология активно ищут методы нефармакологического лечение, такие как различные диеты. Средиземноморская и кетогенная диеты показывают хорошие результаты как в клинических испытаниях на людях, так и в экспериментах на животных.

Истомин Владимир Андреевич,

выпускник ЛНМО 2003 года,

Кафедра гидроаэромеханики СПбГУ
к.ф.-м.н.

Попадание в ЛНМО разделяет жизнь на «до» и «после». Если в классических школах большинство учителей работает «по предмету», то благодаря Илье Александровичу мы все получили намного больше, чем сам предмет, а именно математическое мышление, и даже больше — научное мировоззрение. За время, проведенное в ЛНМО, мы успели построить надежный фундамент знаний для последующих достижений и открытий. Всего за три года Илья Александрович успел заложить в нас необходимый базис математических знаний, и, что еще важнее, зажечь в нас интерес к

фундаментальным исследованиям.

За годы существования ЛНМО Илья Александрович всегда стратегически подходил к развитию не только школьников, но и самой школы в целом. Можно с уверенностью сказать, что к настоящему моменту ЛНМО представляется из себя намного больше чем образовательное учреждение. Более подходящим было бы назвать это «экосистемой» развития талантов учеников, с возможностью их применения на всех этапах жизненного цикла, будь то школа, университет или взрослая жизнь. Таким образом, происходит не только развитие в текущем моменте, но и закладка фундамента достижений следующих поколений.

Кроме учебного периода, с большой теплотой всегда вспоминаю наши летние математические лагеря, позволяющие приучить еще совсем юных школьников к непрерывному обучению и самосовершенствованию. Такой плотный график должен обязательно иметь период разгрузки, и даже тут Илья Александрович проявил всю свою многогранность, организуя очень интересные туристические походы в разные места нашей Родины. Моменты, запечатленные во время нашей поездки на о. Байкал, а также в предгорье Саян, навсегда врезались в мою память. Сейчас, объехав полмира (что произошло, в том числе, благодаря результатам, достигнутым на базисе полученных в ЛНМО знаний), до сих пор считаю это путешествие одним из самых памятных в моей жизни.

Последнее, но не менее важное — замечательный коллектив одноклассников, который вместе с тобой старается

развиваться на ниве научных знаний. Большинство одноклассников, окружавших меня в ЛНМО, достигли значительных высот в различных областях. Хочется отметить, что благодаря выстроенной Ильей Александровичем системе обучения в ЛНМО, полученного багажа знаний достаточно для реализации не только в научной сфере, но и в научно-прикладной, гуманитарной, административной и т.д. Безусловно, это является неоспоримым конкурентным преимуществом обучения в ЛНМО при построении личностного карьерного пути.

Кинетическая теория процессов переноса и релаксации

В своей научной деятельности я занимаюсь развитием кинетической теории процессов переноса и релаксации в потоках сильнонеравновесных реагирующих газов. В 2012 году, под руководством профессора Кустовой Елены Владимировны, защитил диссертацию по теме: «Высокотемпературные течения смесей газов с учетом электронного возбуждения». Являюсь автором и соавтором более 20 научных публикации, а также руководителем нескольких грантов РФФИ и РНФ.

Построение различных приближений кинетической теории для многокомпонентных смесей реагирующих газов в условиях сильного термического и химического отклонения от равновесия важно для множества современных прикладных научно-технических проблем: моделирования вхож-

дения космического корабля в атмосферу планеты, гиперзвукового движение в атмосфере, течения в соплах, высокоэнтальпийных установках, решения проблемы загрязнения атмосферы и т.д..

До последнего времени при расчете коэффициентов переноса в основном использовались полуэмпирические формулы, позволяющие приближенно рассчитывать указанные величины. Подобный подход слабо применим, например, в задачах расчета параметров тепловой защиты космического корабля при условиях, характерных для вхождения в атмосферу планеты: во фронте ударной волны происходит возбуждение внутренних степеней свободы атомов (электронные) и молекул (электронные, колебательные и вращательные), что приводит к изменению внутренней энергии газа, и, следовательно, может значительно влиять на параметры переноса и тепловой поток, в частности. Получение точных данных по параметрам потока в подобных условиях возможно лишь численным моделированием или при проведении натурных экспериментов. При использовании современных методов численного моделирования расхождение между получаемыми результатами по тепловым потокам при сравнении с данными телеметрии может достигать 100% и более, что считается вполне в пределах погрешности, не являясь при этом таковым.

Особенности точного расчета коэффициентов переноса в части решения большого числа алгебраических уравнений, получаемых путём преобразований из интегро-дифференциальных, накладывают свои требования на точ-

ность или скорость проводимых расчетов (в том числе при использовании в инженерных приложениях), что приводит к необходимости в разработке приближенных вычислительно быстрых (однотемпературных, многотемпературных) и точных поуровневых приближений кинетической теории.

В рамках моей кандидатской диссертации было разработано однотемпературное приближение, позволяющее учесть при расчетах коэффициентов переноса электронное возбуждение атомов и молекул в высокотемпературных течениях смеси газов. К тому моменту почти во всех газодинамических задачах атомы предполагались бесструктурными частицами, а внутренняя энергия молекул рассчитывалась лишь с учетом колебательных и вращательных степеней свободы. Это происходило, в том числе, в связи с отсутствием всеобъемлющих квантовых данных о наборе возможных электронных уровней атомов, число которых до энергии ионизации, вообще говоря, неограниченно; также свою роль играло большое количество вычислительных ресурсов, требуемое при проведении прикладных газодинамических расчетов. На основе разработанной теории было показано, что в высокотемпературных течениях газов учет электронного возбуждения необходим в связи с нелинейным характером зависимости внутренней энергии от температуры, и коэффициента теплопроводности в частности. Развивая указанное направления, была построена наиболее точная поуровневая модель, учитывающая электронное состояние каждого компонента смеси в качестве частицы «отдельного сорта». В случае электронно-возбужденных частиц, с ростом электронной энергии за счёт увеличения ра-

диуса орбиты внешнего электрона от ядра происходит увеличение линейного размера частицы, то есть столкновительного диаметра. В проведенных исследованиях было показано, что для электронно-возбужденных атомов возрастание столкновительного диаметра с ростом главного квантового числа происходит немонотонно. Это означает, что корректный учет сечения столкновения в интеграле столкновений может значительно влиять на конечный результат вычисления потоковых членов.

Для использования результатов разработанных выше моделей в инженерных расчетах был разработан программный комплекс PAINeT (Planet Atmosphere Investigator of Non-Equilibrium Thermodynamics) для расчета макропараметров, коэффициентов переноса и потоковых членов в различных задачах газодинамики, с учетом влияния сильной неравновесности, химических реакций, ионизации и электронного возбуждения. Программный комплекс включает в себя базу данных физических свойств 21 атома и молекулы, а также их всевозможные электронно-колебательные и электронные состояния (всего более 12000); а также базу данных химических реакций (всего более 2200, в том числе поуровневыми реакциями, зависящими от электронных, колебательных и электронно-колебательных уровней).

С целью ускорения производимых программным комплексов расчетов была показана возможность использования машинного обучения при расчете физических свойств и коэффициентов переноса смесей газов с учетом электронного возбуждения. Указанный подход позволяет использо-

вать обученную нейронную сеть для проведения моментальных точных расчетов коэффициентов переноса для смесей с произвольно задаваемой на вход концентрацией компонентов, а также температуры и давления газа.

Красильников Михаил Борисович,

выпускник ЛНМО 2003 года,

Начальник отдела математической оптимизации и моделирования BIA-Technologies, к.ф.-м.н.

У каждого человека в жизни свой путь познания, ошибок, взаимоотношений. И всегда так получается, что чем выше качество людей, которых ты встречаешь на этом пути, тем качественнее становится твоя собственная жизнь. Для человека исследовательского очень важно такое качество как любознательность. В детстве оно есть почти у каждого, но у него есть одно важное свойство — за ним всегда необходимо следить, ухаживать и не терять в погоне за материальными ценностями. В детстве мы не обращаем на это внимание, и нам кажется, что оно естественно, но позже мы понимаем, что сохранить и развить его нам помогают учителя, к которым ты чувствуешь все большую и большую благодарность в процессе развития своей карьеры. Мне очень везло с учителями: моя Мама, преподаватель шахмат, учитель физики в школе и научный руководитель в университете. Но если попросят меня назовать любимого школьного учителя, я без доли раздумья скажу — Илья Александрович Чистяков. Школа — это коллектив, а хорошая школа — это коллектив выдающихся людей, и Илья Александрович сумел собрать действительно звездный состав учителей и учеников.

После школы, в аспирантуре, моим учителем был выдающийся ученый — Олег Святославович Васютинский. Итак, благодаря вкладам от всех этих выдающихся людей я получил возможность заниматься тем, чем я хочу, а именно любой областью знаний, которая меня увлекает. Так, в рамках кандидатской диссертации я занимался физикой элементарных химических и фотохимических реакций, после защиты кандидатской я занимался физикой плазмы, сейчас занимаюсь прикладной математикой и написанием программных бизнес-приложений для коммерческой компании. Илья Александрович дал мне необходимую базу и вырастил во мне тягу к решению сложных задач, к математическим расчетам, программированию, моделированию и, самое главное, живое любопытство ко всему этому. В качестве одного из примеров хочу рассказать о математической оптимизации.

Есть такая область прикладной математики, как математическое программирование. Ее целью является разработка теории и численных методов решения многомерных задач с ограничениями. Другими словами, оно занимается методами решения задач нахождения наилучших вариантов из всех возможных. Формально задачу математической оптимизации можно задать с помощью области определения функции $X = \{\vec{x}, g_i(\vec{x}) \leq 0, i = 1, \ldots, m\} \subset R^n$, функционала $f\colon X \to R$, и критерия оптимизации (максимизация или минимизация).

В результате решения необходимо найти такое значение $\vec{x}$, при котором функция f достигает экстремального зна-

чения на этой области определения.

Хотя на первый взгляд кажется, что надо просто перебрать все элементы множества определения и, подставляя в функцию, выбрать в итоге тот вариант, который даст наилучшее решение. Но на практике это оказывается не так просто. Например, при степенном росте сложности задачи от увеличения количества переменных мы быстро приходим к ограничению производительности современных компьютеров, что не дает получить искомый результат. Ввиду этого полный перебор заменяется различными более умными методами направленного поиска наилучшего решения: симплекс-метод, барьерный метод, метод эллипсоидов, градиентные спуски и их различные модификации. При использовании этих методов появилась возможность решать задачи с сотнями миллионов вещественных переменных. А это, в свою очередь дало потенциал использовать разработки для решения задач реального мира. Как видно из общей постановки, задача выбора лучшего решения при условии различных ограничений возникает в любой области жизни, везде.

Математическая оптимизация используется в финансовой сфере, при построении портфеля ценных бумаг в целях максимизации ожидаемой прибыли при ограничении на значение ожидаемого риска, минимизации транспортных затрат для логистических компаний при ограничениях на необходимый уровень сервиса, максимизации подъемной силы крыла самолета с учетом ограничений на формфактор крыльев и т.д.

С ходу можно придумать игрушечный пример, который относится к теме этой статьи. Пусть x_i — вещественная переменная, соответствующая количеству усилий, которые необходимо тратить на ученика учителю; c_i — это обучаемость ученика, соответствующая его эффективности по итогу обучения, относительно вложенных в него усилий.

Целью учителя является, подготовить максимально обученный набор из N учеников: $\sum_{i=1}^{N} c_i \cdot x_i \to \max$. При этом всем учитель ограничен по времени и не может тратить на ученика больше определенного количества усилий, так как человеку все-таки надо когда-то и отдыхать. Это может быть сформулировано, как $\sum_{i=1}^{N} x_i \leq X_{\text{учителя}}$. Где под $X_{\text{учителя}}$ подразумевается «мощность» учителя. Также надо учитывать, что учитель из гуманных соображений должен вкладываться не только в самых выдающихся учеников, но и в отстающих, кроме того, у каждого ученика есть свой предел: что если в него вкладывать больше какой-то величины, это уже перестает приносить результат, например, это определяется усталостью ученика, что можно выразить соответствующими уравнениями: $x_{\min} \leq x_i \leq x_{\max}, \forall x_i$. В итоге сформулированную задачу можно переписать в программном виде и решить с помощью современных солверов линейного программирования и получить численный результат, определяющий стратегию распределения усилий учителя между учениками, чтобы получить наилучший результат.

Как видно, текущая модель не включает еще много физических факторов и ограничений, но ее также можно легко дополнить с помощью дополнения целевой функции или

добавления ограничений. Но возвращаясь к цели статьи, хочется отметить, что Илья Александрович решает десятки подобных задач оптимизации в процессе выбора стратегии для себя и для школы и всегда получает оптимальный результат, за что мы, все его выпускники ему, бескрайне благодарны.

Ляпунов Алексей Дмитриевич,

выпускник ЛНМО 2003 года,

Руководитель направления экспортных продаж компании СВЕЗА

Образование является одним из ключевых факторов формирования личности, ведь его качество во многом определяет жизненный путь человека. Роль личности учителя трудно переоценить. Настоящий Учитель — человек, который может понять ученика, взрастить его личность, увидеть его талант, способности, развить их, правильно преподнести материал, заложить основу его профессионального успеха. Найти своего Учителя — задача сложная, но она стоит потраченных времени и сил. Таким Учителем для меня стал Илья Александрович Чистяков — не только высококомпетентный профессионал, но и внимательный, чуткий педагог. До встречи с ним математика представлялась мне скучной дисциплиной. Илья Александрович открыл для меня мир математики совершенно с другой стороны. Благодаря его внимательному отношению к ученикам, искренней увлеченности своим делом, грамотно составленной программе обучения, изучение математики превратилось для меня в увлекательный насыщенный процесс, который впоследст-

вии определил мою профессиональную и научную стезю. Оглядываясь назад, я отчетливо понимаю, что мои кандидатская степень по экономике и успешная карьера в экспортных продажах были бы невозможны без фундамента, заложенного в ЛНМО. Годы обучения у Ильи Александровича я всегда вспоминаю с особой благодарностью и теплотой.

Модели и методы повышения эффективности развития системы управления сбытом программных продуктов.

Целью моего диссертационного исследования являлось определение путей повышения эффективности системы управления сбытом предприятий — производителей в сфере программного обеспечения, разработка предложений, нацеленных на совершенствование и повышение эффективности их работы. В своей исследовательской работе я стремился рассмотреть теоретические основы оценки эффективности управления сбытом программных продуктов, определить экономическую категорию эффективности, виды, точки эффектов и методы её оценки, изучить системы управления сбытом, их классификацию и особенности управления сбытом программных продуктов. Проведенный анализ позволил разработать и предложить пути повышения эффективности системы сбыта на предприятиях профиля разарботки программных продуктов, значительно оптимизировать бизнес-процессы, разработать экономическую модель сбалансированного роста продаж и успешно внедрить и применить разработанные модели и методики в Группе компаний «ПРОМТ», являющейся одним из лидеров произ-

водства программного обеспечения в России.

Олег Михайловский,

выпускник ЛНМО 2005 года,

Purdue University,
Индиана, США

Я, как и оба моих брата, Федор и Дмитрий, которые тоже отучились в Лаборатории, вспоминаем ее с позитивными эмоциями. Очевидно, что это время было проведено не только весело, но и с огромной пользой. Я поступил в Лабораторию в 2002 году, но не совсем традиционным путем, который проходит большинство - не через вступительные испытания. К тому моменту, я год отучился программированию в кружке при Аничковом Дворце. Придя туда записываться на следующий курс, я познакомился с Еленой Александровной Драч, а она порекомендовала меня Илье Александровичу Чистякову. С тех пор «обычного» у меня было не много.

Придя в школу, да еще после начала учебного года, я был несколько шокирован нестандартной обстановкой и был явно не готов к такому интенсивному режиму (например, к урокам по полтора часа в кабинетах одного из крыльев детского сада, где меловые доски висят по всему периметру!!!). Часто возникало странное ощущение: думаешь, что правильно сделал домашнее задание и все понял, но, уже стоя у доски, понимаешь, что ничего не понимаешь. Мне было невероятно тяжело первые несколько недель. Но потом я постепенно влился в ту атмосферу, что Илья Александро-

вич и все подобранные им преподаватели создавали в школе. Он познакомил меня с первым в моей жизни научным руководителем - Станиславом Исааковичем Кублановским (полагаю, Илью Александровича можно назвать «нулевым», учитывая, что я пришел из программистского кружка).

В 2005 году я оказался в составе группы учащихся, которая поехала в Финикс, Аризона, США на смотр научных работ, организованный Intel. Я с одноклассниками ехал с работой по рациональным формам, которой занимался на протяжении всего года. Мой младший брат Федор и мой друг и одноклассник, Степан Исмакаев, везли работу по рядам, которую они написали под руководством Сергея Иванова, выпускника школы 2004 года. За три года до этого я даже и мечтать не мог о том, что окажусь в Штатах с братом (и без родителей!), не говоря уже о премии от Американского Математического Общества. Думаю, не нужно говорить, кого стоит благодарить за эту возможность.

В том же 2005 году я поступил на Мат-Мех СПбГУ. Когда настала пора выбирать специализацию, я выбрал не ту, что Илья Александрович предполагал для меня. Мне кажется, он был бы больше доволен, если бы я пошел на кафедру алгебры, нежели дифференциальных уравнений. По окончании специалитета в 2010 году, через какое-то время, наши пути опять пересеклись, и Илья Александрович рекомендовал меня в качестве преподавателя математики в школу имени А.М. Горчакова в Павловске.

А в 2014 году помог рекомендацией при поступлении на междисциплинарную PhD программу, в университет

Пэрдью, Индиана. Перед написанием PhD-диссертации я попробовал несколько разных областей науки: в том числе, нейробиологию, биоинформатику — но выбор остановил на структурной биохимии, а именно на моделировании белков. Мое первое четкое воспоминание о слове «белок» в контексте биологии, а не на бытовом уровне, ассоциируется с уроками Евгения Александровича Нинбурга в ЛНМО. Тогда я мало обращал внимания на этот предмет, но со временем мой фокус сдвинулся в эту, более прикладную, область научного знания.

Если коротко, то парадигма современной молекулярной биологии заключается в том, что структура определяет функциональность. Чтобы понимать и предсказывать работу молекулярных систем в живом организме нужно их корректно и точно смоделировать. Основными методами получения структур белков являются рентгеновская кристаллография (X-ray), спектроскопия ядерного магнитного резонанса (ЯМР) и набирающая популярность криоэлектронная микроскопия. Однако, поскольку белок — сущность динамичная, то статичной картины, предоставляемой одними только структурными исследованиями, недостаточно. Здесь, помимо прочего, помогает симуляция поведения молекул in silico, она же молекулярная динамика (МД).

В 2017 году из статуса Graduate Student я перешел в статус PhD-кандидата, защитив, хоть и не с первой попытки, Original Proposal на тему Dynamical aspects of the Ups1-Mdm35 complex. В этой работе я предлагал план исследования упомянутого комплекса белков, который важен для

транспортировки фосфатидных кислот. Эти кислоты являются прекурсорами кардиолипинов, неотъемлемых элементов внутренней митохондриальной мембраны, необходимых для ее корректного функционирования. Основными техниками предлагались симуляция МД с помощью Amber, одного из больших популярных пакетов для таких целей, и ЯМР.

Наконец, в 2020, уже после начала карантинных мер в США, я защитил диссертацию на тему Applications of Molecular Dynamics Simulations in Protein X-ray Crystallography. Здесь уже, как видно из названия, работа была более фундаментального характера и применима на самом деле не только к белкам, но и к ДНК и РНК (то есть, ко всем трем основным макромолекулам). В первой части я предлагал метод уточнения кристаллографических структур, для которого написал модуль упомянутого выше Amber, став соавтором официального релиза этого программного пакета. Во второй части я изучал, как белковая динамика проявляет себя в не-Брэгговом рассеянии макромолекулярных кристаллов, то есть под и между пиками интенсивности, наблюдаемыми на дифракционной картине. Сейчас я продолжаю заниматься улучшением методов моделирования макромолекулярных структур.

Во всех областях, упомянутых выше, навыки, заложенные в Лаборатории, всегда давали мне большое подспорье. И хотя я не занимаюсь математикой профессионально, полученные знания помогают мне на карьерном пути. Математика всегда оказывается нужна то здесь, то там, а я пы-

таюсь формализовать поставленные задачи в математический язык, добиваться строгих логических выводов. Да и в свободное время решение математических головоломок всегда помогает мне отвлечься.

Хотя мы с Ильёй Александровичем в последние годы не часто общаемся, мне всегда приятно увидеться с ним. Например, в 2018 году в Питтсбурге, Пенсильвания, США, я был рад, что он все так же “в деле”. Тогда он сопровождал группу учащихся из России на такой же смотр, на котором был и я, но 13 лет спустя. В той группе был второй из моих братьев, Дмитрий. Он и его одноклассник привезли премии секции математики, которые по традиции висят на стенах школы. И, тоже по традиции, они привезли плюшевые игрушки, как и наша группа в 2005.

Читая эту заметку, может показаться, что речь немного не об Илье Александровиче, но я надеюсь, вы поймете, что я имею ввиду. Я бы не оказался там, где я есть сейчас, если бы в моей жизни не случилось встречи с Ильей Александровичем и его Лабораторией. Спасибо!

Тодоров Дмитрий Игоревич,

выпускник ЛНМО 2006 года,

научный сотрудник в Университета Дюссельдорфа, к.ф.-м.н.

Когда я учился в 8 классе обычной школы, моя жизнь была довольно серой и беспросветной. Примерно такого же цвета, как стена Ломоносовского фарфорового завода напротив школы. Живя в довольно мрачном районе Петер-

бурга, откуда я практически никуда не выходил, и проводя всё свободное время, играя в компьютер, я не строил планов на особенно яркое будущее. Я попал в ЛНМО довольно случайно, после плохо написанной олимпиады по математике, куда я до сих пор не понимаю, зачем меня отправили. ЛНМО и её стимулирующая атмосфера (неравнодушные учителя, умные одноклассники, уважение к ученикам) дала моей жизни вектор, которого раньше не было. Не уверен, что этот вектор был во всём подходящим для меня, и потом я менял его несколько раз уже самостоятельно, но до ЛНМО у меня не было никакого. Вообще, ЛНМО (которая включала всего 2 класса во время моего обучения) ощущалась во многом, как вторая семья, что тоже было очень кстати для меня тогда. Кроме того, поездки на международные конкурсы позволили мне расширить кругозор.

Когда я учился в ЛНМО, общее ощущение было в духе «самые умные становятся математиками, а остальные занимаются чепухой». К окончанию школы я был полон амбиций и, во многом поэтому, поступил на МатМех СПбГУ. После первых двух лет я попробовал отойти от математики и устроился на полставки программистом благодаря помощи бывшего выпускника ЛНМО. Через два года я устал работать в коммерческой структуре, уволилися и решил сосредоточится на науке вообще и на моём дипломе в частности. Мой диплом был посвящен динамическим системам — теме, соседней с той, по которой я писал научную работу в ЛНМО.

После защиты я не был уверен, чем хочу заниматься

дальше, но уже знал, что могу работать не только математиком. Тем не менее, после неудачной программистской работы и под давлением перспективы оказаться в армии, я решил поступить в аспирантуру МатМеха, продолжая работу, начатую в дипломе. Мне очень повезло, что как раз в это время создавалась лаборатория имени П. Л. Чебышёва и меня туда приняли. Благодаря её многочисленным курсам и спонсированным ей моим многочисленным поездкам на всевозможные конференции по всему миру, моё понимание математики очень сильно расширилось. Кроме того, стало возникать понимание о месте математики по отношению к другим наукам (в частности, физике). Этому пониманию также помогло то, что параллельно я работал над сторонним проектом по системной биологии (динамическим системам в приложении к молекулярной биологии) в СПбГПУ. И одновременно я помогал стороннему человеку в чисто инженерных рассчётах для его диссертации по технологии сварки. Кроме того, я научился подаваться на разного рода финансирование и получил небольшую стипендию от правительства РФ для аспирантов, а также стипендию от Петербургского отделения математического института им. Стеклова.

Моя кандидатская диссертация была нормальной по качеству в российском контексте, но довольно слабой в меркам западной науки (как я теперь понимаю). Тем не менее, благодаря многочисленным усилиям (отчасти подпитанным страхом о пути России после 2014 года), мне удалось найти постдок позицию (научную стажировку) в Эколь Нормаль в Париже через месяц после моей защиты в октябре 2014. Это

место по праву считается одним самых сильных математических центров в мире. Однако позиция была всего на год, она требовали ощутимой смены темы (хотя и в рамках тех самых динамических систем) и мои отношения с новой научной руководительницей не сложились. После этого мне удалось найти ещё одну позицию на год в Марселе и, параллельно, податься на грант Мари Кюри (серьёзное финансирование напрямую от Евросоюза). К сожалению, грант мне не дали и, в целом, я несколько разочаровался в математике: те задачи, которые я мог решить, мне казались неважными, а те, которые хотел бы, оказались чрезвычайно сложными, и постдок-контракты длиной в год вкупе огромным количество бюрократии, сопровождающим их, не позволяли их продвинуть.

Во время моей работы в Марселе я довольно случайным образом несколько раз столкнулся с вычислительной нейробиологией, наукой на стыке математики, нейробиологии и информатики. До этого, работая и учась с “чистыми” математиками я впитал предубеждение, что люди, занимающиеся приложением математики в биологии, не умеют использовать серьёзную математику и, вообще, занимаются какой-то чепухой. Но, прослушав несколько хороших научных и научно-популярных лекций, я начал в этом серьёзно сомневаться. Поэтому, когда я обнаружил, что найти новый постдок-контракт в математике мне не удаётся, я стал искать работу во всех областях, где мои динамические системы могли бы быть приложены. И, в конце концов, нашёл новый постдок в области вычислительной нейробиологии в г. Атланта в США.

Это был довольно рискованный шаг, потому что я не знал про устройство и работу мозга почти ничего. Однако, приложив определённые усилия, мне удалось это поправить и успешно начать карьеру в этой новой для меня области науки. После Атланты я успел ещё поработать в университете Брауна (один из университетов известной «лиги плюща») и вернуться в Европу, получив-таки грант Мари Кюри (на этот раз уже как «биолог») для работы в Барселоне. Как раз недавно он закончился и я переехал в Дюссельдорф в Германии.

Таким образом я прошёл путь от очень абстрактной науки, работая с математиками до очень прикладной, работая с нейрохирургами. В ЛНМО, когда я там учился, был большой акцент на высшей алгебре и я был в восторге от теории категорий, а сейчас я анализирую и моделирую данные активности мозга, которые напрямую записаны у пациентов с болезнью Паркинсона.

Научная деятельность

У меня довольно большой разброс тем, поэтому я обозначу их довольно кратко. В ЛНМО мой первый научный проект был связан с аналитической теорией чисел (область математики, возникшая, во многом, в рамках доказательства большой теоремы Ферма). Второй был связан со статистическими свойствами многомерных случайных блужданий — областью теории вероятности, соседней с эргодической теорией (теория динамических систем, сохраняющих меру). Этот второй проект значительно повлиял на мою дальнейшую

карьеру, в которой динамические системы играют центральную роль.

В университете я занимался областью динамических систем, где большую роль играет геометрия, чем теория меры и вероятности. Начну с мотивации со стороны физики. В курсах физики всех школ есть начала термодинамики, где всё строится на понятии температуры. Чтобы понятие температуры системы имело смысл, в статистической физике предполагается, что движение частиц в системе случайно, однако в большинстве случаев это неверно, потому что квантовые эффекты не играют роли на тех расстояниях, которые важны для классической статистической термодинамики и частицы движутся, следуя детерминистическим законам. Чтобы разрешить этот парадокс и понять, как детерминистические частицы могут вести себя, как случайные, в 60-х годах XX-го века в физике появилась т.н. теория хаоса. Одновременно начались попытки математиков придать ей строгость. Одним из технических инструментов в рамках этих попыток стала теория отслеживания.

Грубо говоря, система называется хаотической, если в ней наблюдается эффект бабочки (т.е., начиная с двух близких начальных условий, система может эволюционировать в существенно разные состояния через конечное время). В этих условиях любая ошибка в вычислениях, даже самая маленькая, должна уничтожать любую надежду на возможность наблюдать поведение динамической системы на длительных промежутках времени. Т.е. если предположить, что кто-то использует уравнения для хаотической системы и пыта-

ется их посчитать на компьютере (у которого конечная точность представления вещественных чисел), этот кто-то не сможет понять ничего про настоящее поведение системы, потому что рассчитанная траектория будет существенно отличаться. Этими «кто-то» преимущественно являются физики-авторы огромного числа работ по теории хаоса. Однако, хотя такая проблема существует априори, иногда её можно решить — несмотря на то, что траектория с ошибками наверняка отличается от «точно» траектории без ошибок, можно доказать, что в важном классе хаотических систем (равномерно гиперболические системы) рядом с любой траекторией с ошибками существует-таки точная траектория, хотя, возможно, и с другим (но близким) начальным условием. Свойство системы иметь точные траектория рядом с ошибочными называется «свойством отслеживания».

Мой диплом и диссертация были посвящены исследованию разных вариантов свойств отслеживания и требовали использования нетривиального геометрического подхода. Если смотреть более широко, впрочем, оказалось, что это очень техническое понятие и доказать что-то новое и действительно важное в отрыве от конкретных приложений практически невозможно. Кроме того, оказалось, что много активных авторов, «работающих» в этой области, пишут статьи только для вида, а иногда и вовсе не следуют этическим стандартам в науке.

Во Франции я работал всё ещё в теории хаоса, но уже ближе к её изначальным истокам, ближе к теории вероятности. Хаотические системы обычно имеют состояние рав-

новесия – ассоциированное с ними распределения вероятностей, характеризующую «среднюю» динамику системы (оно и определяет температуру в термодинамику). Если система зависит от численного параметра, то и распределение зависит от этого параметра. В школьных курсах предполагается, что эта зависимость непрерывна и дифференцируема. Однако это не всегда так на самом деле. Я искал возможность проверить дифференцируемость этой зависимости (наличие т.н. «линейного ответа») у системы уравнений Лоренца (той самой, которая дала имя «эффекту бабочки»).

В рамках нейробиологии теория хаоса менее важна (хотя для неё там тоже есть место), однако динамические системы играют ключевую роль. Причина этого в том, что в 1963 английские учёные Ходжкин и Хаксли получили Нобелевскую премию за создание модели того, как устроена электрическая активность в нервных клетках. Эта модель (система нелинейных дифференциальных уравнений) и её производные широко используется по сей день для описания разнообразных динамических процессов в нервной системе.

Конкретно я работал над тремя разными направлениями. Первое: создание математической модели сети участков мозга, ответственных за обучение новым движениям, основываясь на данных, полученных в лабораториях, работающих с людьми и обезьянами. Второе: математический анализ поведения динамической статистической модели поведения отдельных нейронов, используемой в интерфейсах мозг-компьютер (в духе того, что делает Neuralink Илона

Маска). Третье: анализ сырых электрофизиологических данных, полученных из мозга пациентов с болезнью Паркинсона для поиска связи между электрическими флуктуациями в мозге и тремором рук.

Жуков Артём Сергеевич,

выпускник ЛНМО 2009 года,

аспирант МатМеха СПбГУ, преподаватель ИТМО и ЛНМО

Когда я поступил в Лабораторию и приехал в первый раз в лагерь, я был ошеломлен. Многие дети уже в чем-то разбирались, участвовали в олимпиадах, а я не знал ничего. Первые несколько дней я не понимал, что я вообще тут делаю, что это за место такое. Я чуть было не заплакал, но Илья Александрович мне все чётко и ясно объяснил. Вооружившись этим, я сдал все лагерные экзамены с первого раза.

Уже в школе я познакомился и с другими учителями: все они были специалисты в своей профессии, многие были учеными, а не просто учителями. Все эти встречи не случились бы, если бы не школа и не Илья Александрович, без них я так и оставался бы в неведении о том, чем занимается математика, что существует элитарная научная культура, в которой действительно можно работать и стать специалистом в своём деле. Илья Александрович продемонстрировал на своём примере, какими качествами и навыками нужно обладать, чтобы ты мог быть её частью.

После школы я поступил на математико-механический факультет СПБГУ, где после второго курса попал на кафедру

дифференциальных уравнений. Одной из причин выбрать эту кафедру было то, что все шли на алгебру или анализ. А так как я человек, склонный к уединению, то я хотел бы пойти туда, где людей мало. Другой причиной послужил тот факт, что это была одна из тем, которой менее всего касались в школе.

После окончания университета я тут же поступил в аспирантуру, где занимался качественным анализом систем дифференциальных уравнений на предмет наличия у них так называемых инвариантных поверхностей. Эта задача выросла из вопросов устойчивости, изучаемых в своё время ещё Ляпуновым и Пуанкаре. Вскоре мне и моему научному руководителю пришла идея, что наши наработки можно использовать для поиска ответа на ослабленный вариант шестнадцатой проблемы Гильберта: проблемы Гильберта—Арнольда. В данный момент я занимаюсь разработкой метода, позволяющего выводить «бифуркационное уравнение», все решения которого будут порождать инвариантную поверхность. Особенностью этого метода является его универсальность, так как она позволяет рассматривать возмущённые части системы, зависящие от времени, а не только автономные возмущения.

Борис Золотов,

выпускник ЛНМО 2015 года,

Факультет МКН СПбГУ,
Сотрудник Фонда «Время Науки»

Моё взаимодействие с Ильёй Александровичем ещё да-

леко от завершения: я выпустился шесть лет назад, но по-прежнему регулярно бываю в ЛНМО, вижу новые поколения школьников, которых она учит, и активно участвую в проектах Лаборатории — составляю задачи для турниров и олимпиад. Под чутким руководством Ильи Александровича мы также выпустили уже три книги про задачи олимпиады «Математика НОН-СТОП» — важного проекта ЛНМО, за плечами которого богатая история.

Я бы хотел сказать о качествах Ильи Александровича как преподавателя и руководителя, которые кажутся мне ключевыми и которые производят впечатление лично на меня, как на человека, который с ним работает.

Во-первых, его харизма и конструктивность. Будучи поставлен в самую новую для себя ситуацию или попрошен откомментировать самый новый для себя текст, он всегда выступит с содержательными замечаниями, о которых никто до него не мог подумать в той же самой ситуации и с тем же самым текстом.

Во-вторых, его умение внушать уважение. Несомненно, именно его персона имеет в ЛНМО наибольшее воспитательное значение, а просто сам факт его существования неподалёку влияет на жизненный выбор школьника.

В-третьих, большая заслуга Ильи Александровича — в коллективе людей, который он вокруг себя собрал. Это абсолютно разные, но инициативные, альтруистичные люди — среди них можно найти тех, кто поделится с тобой самым разным опытом и самыми разными навыками.

И самое главное, конечно, — это подход Ильи Алексан-

дровича к математике. Его курсы отличаются от всех остальных фокусом на понимании, который он делает. Некоторых результатов из этих курсов вы не встретите под их названиями в классических лекциях университетов, но они, сформулированные именно по-Чистяковски, очень важны именно для понимания механики работы с теоремами и утверждениями — а это самая главная цель на начальном этапе изучения математики.

А теперь я расскажу о той математике, которой занимаюсь сам.

Вычислительная геометрия

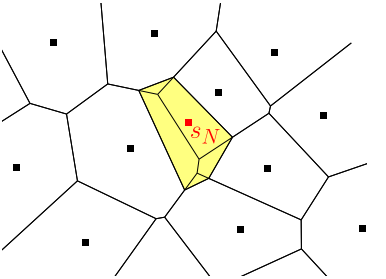
Я занимаюсь вычислительной геометрией. Этот раздел математики имеет множество открытых задач, банк которых постоянно пополняется: проблемами, имеющими непосредственное практическое применение, задачами, приходящими из других математических сфер, и, разумеется, всем, до чего только может дойти фантазия учёного. Вычислительная геометрия собрала вокруг себя дружное сообщество специалистов, а статьи по ней отличаются наиболее красивыми иллюстрациями и оформлением из всего, что только можно найти в математике.

Вычислительная геометрия рассматривает такие проблемы, как размещения объектов на плоскости, изображение графов, построение различных диаграмм, склейки и раскраски. Она может показаться наблюдателю куда менее «высоколобой», чем гомологическая алгебра или матфизика, но

она не менее важна как наука и ответственна за не меньшее количество важных результатов. Среди всего многообразия задач, которое можно наблюдать, будучи зрителем конференции или открыв свежий выпуск математического журнала, мне пришлось наиболее плотно работать с двумя.

Динамические диаграммы Вороного. Проще всего объяснить, что такое диаграмма Вороного, заставив слушателя подумать о том, как дома в городе приписываются к отделениям почты. Диаграмма Вороного для n точек (будем называть их *сайтами*) — это разделение плоскости на n областей так, что для точек в каждой области их сайт к ним ближе, чем все остальные. Всем известно, что для n сайтов диаграмма Вороного строится за время $O(n \cdot \log n)$, и быстрее никак нельзя. Алгоритмы для этого есть разные, наиболее известны *sweepline* и *«Разделяй и властвуй»*.

Теперь представим, что к n сайтам добавился один новый. Сколько времени нужно, чтобы перестроить диаграмму, отобразив на ней новую область, которая соответствует этому сайту? Если мы хотим знать координаты всех рёбер и вершин — доказано, что быстрее, чем за $O(n)$, нельзя. А если нам нужно поддерживать только *граф* диаграммы Вороного, то есть исключительно то, какие вершины связаны с какими — можно ли быстрее?



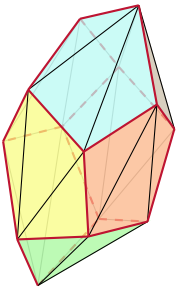
Изменение диаграммы Вороного при вставке нового сайта

Известна нижняя оценка: быстрее, чем за $O(\sqrt{n})$ в среднем за много операций, не получится — умные люди построили пример, когда при вставке новых сайтов раз за разом придётся резать и рисовать $\sqrt{n}$ рёбер. Можем ли мы подобраться к этой нижней оценке, отойдя от верхней, линейной?

Оказалось, что да: мы с соавторами придумали алгоритм, который справляется обновлять граф диаграммы Вороного за $O(n^{3/4})$. Сейчас я занимаюсь тем, что пытаюсь ещё ближе подойти к нижней оценке $O(\sqrt{n})$. Как часть этого пути, я доказал оценку количества комбинаторных изменений в так называемой *beach line:* последовательности парабол, равноудалённой от точек-сайтов с одной стороны и некоторой прямой линии с другой. Верю, новые результаты уже рядом.

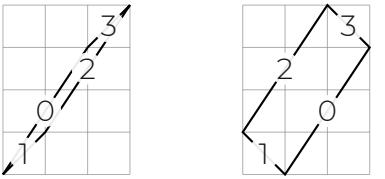
Склейки правильных многоугольников. Теорема Александрова утверждает, что любому способу склеить несколько многоугольников вдоль рёбер, так что получающаяся склейка гомеоморфна сфере и сумма углов в любой точке не превосходит 2π, соответствует единственный выпуклый многогранник.

Проблема в том, что алгоритма, позволяющего найти этот многогранник, не существует. Вообще. Чтобы хоть как-то продвинуться в поисках этого многогранника, задачу его восстановления решают в частных случаях. Один из таких случаев, любопытных, но обозримых, — склейка нескольких одинаковых правильных многоугольников, так что каждое ребро точно попадает на другое ребро.



Многогранник, склеенный из пятиугольников

Про 6 и более-угольники всё уже было известно до меня. Что я сделал — закончил классификацию всех многогранников, которые можно склеить из одинаковых правильных пятиугольников (таких, кстати, всего 8), и предложил способ описать все многогранники, которые можно склеить из квадратов. Таких, разумеется, бесконечно много, но я доказал, что если квадратов не более чем n, — то количество многогранников, которые можно склеить, можно оценить снизу n^3 и сверху n^{36}. Их количество полиномиально по n — это уже хорошо. Так могло и не оказаться.



Интересный способ склеить что-то из квадратов

Осталось разобраться с равносторонними треугольниками. С ними немного сложнее, по ряду причин, но этот результат тоже совсем близко.

Гученко Роман Александрович,

выпускник ЛНМО 2009 года,

ведущий аналитик-исследователь в ООО «Кримтех», к.ф.-м.н.

Признаюсь, когда, удачно написав олимпиаду, перешел из языковой гимназии в 10й класс ЛНМО, первое время я находился в состоянии перманентного шока. Не в последнюю очередь потому, что учебный год в новой школе начался в летнем математическом лагере со спецкурсов по топологии и метрическим пространствам. В противовес условным квадратным уравнениям, которыми закончился мой предыдущий год. Поэтому старт учебы в ЛНМО получился запоминающимся.

С Ильей Александровичем Чистяковым, директором своей новой школы, познакомился в поезде по дороге в лагерь. Он обыграл меня в шахматы. И это после того, как я выиграл чайный пакетик и кусочек сахара у сопровождавшего нас студента в результате другого напряженного шахмат-

ного матча. Вкус предыдущей победы был изрядно подпорчен! Уже тогда начал подозревать, что учеба будет непростой. Дальнейший месяц только подкрепил мои опасения.

К счастью, школьная рутина оказалась намного проще лагерной, и я начал понемногу подтягиваться до уровня учившихся в ЛНМО ребят, компенсируя недостаток знаний старательностью. Благо, перевелся из предыдущей школы я не один, а со своими друзьями, поэтому осваиваться на новом месте было проще. Также в ЛНМО я завел новых друзей, со многими из которых общаюсь до сих пор.

Илья Александрович вел у нас всю математику. Алгебра и геометрия в его исполнении мне не особо нравились. Другое дело — матан. Матан был на совершенно другом уровне строгости по сравнению со всем тем, что я когда-либо до этого видел.

Благодаря идеологической обработке от ИА, когда дело дошло до поступления в ВУЗ, вопрос выбора вообще не стоял — только Мат-мех. Но на какое направление идти? Поскольку ни к чистой математике, ни к чистому программированию душа моя не тяготела, после некоторых мытарств мой выбор пал на прикладную математику. И я не прогадал.

После второго курса поступил на кафедру Статистического моделирования. Кстати, математическая статистика — основная дисциплина на кафедре — занимается обратными задачами теории вероятностей. Теория вероятностей, по крайней мере отечественная её версия, основанная на аксиоматике Колмогорова, — это подраздел теории меры. В свою очередь, теория меры — это матан, к которому меня

приучали со школы. Такая вот цепочка, выходящая на Илью Александровича, получается.

Под руководством Вячеслава Борисовича Меласа на Статмоде защитил кандидатскую диссертацию на тему «Планирование экспериментов для дискриминации регрессионных моделей».

Кратко о моей научной работе. Задачи планирования экспериментов по сути сводятся к поиску минимумов или максимумов выпуклых или вогнутых функционалов от дискретных нормированных мер. Эти меры именуются планами экспериментов. Функционалы же соответствуют, например, объемам доверительных эллипсоидов в задачах оценки параметров, которые естественно минимизировать, или мощностям статистических тестов при проверке гипотез о виде моделей в задачах дискриминации, которые естественно максимизировать. В некоторых частных и довольно простых случаях задачи дискриминации могут быть сведены к задачам планирования для оценки параметров или к задачам наилучшей чебышёвской аппроксимации, а оптимальные планы могут быть найдены аналитически. В общих же случаях приходится использовать численные методы, которые, ввиду довольно высокой сложности решаемых оптимизационных задач, требуют фундаментального подхода при их разработке.

Сейчас я иногда появляюсь на кафедре, участвую в защитах курсовых и дипломных работ, изредка публикуюсь. Мне нравится атмосфера университета, но не назвал бы свою нынешнюю научную деятельность очень активной.

Моя коммерческая деятельность связана с интернет-рекламой. Разрабатываю роботов, которые, с использованием модных нынче машинного обучения и больших данных, показывают людям персонализированные баннеры.

В итоге я доволен тем, чем занимаюсь. Дорогой, по которой иду. А поставили на эту дорогу меня в ЛНМО. Так что передаю сердечный привет всему коллективу школы и поздравления её идеологу и идейному вдохновителю. С юбилеем, Илья Александрович!